

# Dominance en pauvreté multidimensionnelle: inférence statistique et application aux pays de l'UEMOA

Yélé Maweki Batana\*, Jean-Yves Duclos†

June 20, 2007

Preliminaire — ne pas citer

## Abstract

Ce papier analyse les relations de dominance de la pauvreté multidimensionnelle dans six pays de l'UEMOA. Deux dimensions sont considérées, à savoir le statut nutritionnel et l'indice de richesse. L'indice de richesse est déterminé selon deux méthodes d'analyse factorielle sur une série de variables qualitatives issues des enquêtes DHS (Demography and Health Surveys). La première méthode s'appuie sur l'analyse des correspondances multiples (ACM) alors que la seconde est basée sur la maximisation d'une fonction de vraisemblance et l'analyse bayésienne. Les tests de bootstrap suggérés par les méthodes de maximisation de la vraisemblance empirique permettent d'identifier l'existence de dominance entre plusieurs pays de l'union, soit 12 relations de dominance sur les 15 relations possibles. De même, la pauvreté apparaît plus importante en milieu rural qu'urbain. Les résultats confirment certaines relations établies dans le cadre des analyses unidimensionnelles.

**Mots clés:** Dominance stochastique, analyse factorielle, analyse bayésienne, pauvreté multidimensionnelle, vraisemblance empirique, tests de bootstrap.

**Classification JEL:** C10, C11, C12, C30, C39, I32.

---

\* CIRPÉE, Université Laval; Email: ybatana@ecn.ulaval.ca

† CIRPÉE, Université Laval; Email: jyves@ecn.ulaval.ca

# Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Estimation des indicateurs de pauvreté</b>	<b>3</b>
2.1	Le calcul de l'indicateur nutritionnel . . . . .	4
2.2	L'estimation de l'indicateur de la richesse . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Analyse de la dominance stochastique bidimensionnelle</b>	<b>8</b>
3.1	La dominance de premier ordre . . . . .	8
3.2	La dominance stochastique d'ordre supérieur . . . . .	10
3.3	Inférence statistique . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Analyse empirique</b>	<b>13</b>
4.1	Les données . . . . .	13
4.2	Résultats des tests de dominance . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>17</b>

## 1 Introduction

Deux approches sont généralement distinguées dans la littérature des mesures de la pauvreté: celle basée sur l'aspect financier ou monétaire (Ravallion et Chen, 1997) et celle qui met l'accent sur une définition plus large que la considération monétaire (Drèze et Sen, 1989; Sen, 1979; 1985; 1987). La première approche consiste essentiellement à considérer le revenu comme mesure de bien-être. Plusieurs tests de comparaisons robustes de ce bien-être ont été proposés dans ce cadre (Anderson, 1996 ; Davidson et Duclos, 2000 ; Barrett et Donald, 2003). Cependant, comme le souligne Anderson (2005), l'intégration d'une dimension supplémentaire dans la mesure du bien-être pourrait modifier les analyses effectuées dans le cadre habituel de distributions univariées.

La seconde approche caractérise le bien-être comme un phénomène multidimensionnel. Sahn et Stifel (2000; 2003) utilisent l'analyse factorielle pour dériver un indicateur de la pauvreté multidimensionnelle à partir duquel ils effectuent des tests de dominance multi-dimensionnelle en pauvreté à travers le temps et entre pays. Un des avantages de cette approche est qu'on élude l'aspect prix inhérent aux mesures monétaires, ce qui rend plus pratiques les comparaisons internationales. Cependant, ces démarches reviennent à résumer plusieurs aspects du

bien-être en un indicateur unique, ce qui réduit l'analyse statistique au cadre traditionnel unidimensionnel. An alternative approach consists in keeping the analysis multidimensional and in restricting the class of admissible poverty indices by imposing properties.

La démarche que nous proposons de suivre concilie les deux types d'approches. Il s'agit d'abord de dériver un indicateur de "richesse" (asset index) incorporant plusieurs attributs de bien-être, puis d'effectuer une analyse bidimensionnelle en considérant une dimension supplémentaire, telle qu'un indicateur nutritionnel. La méthode de vraisemblance empirique proposée par Davidson et Duclos (2006) sert ensuite à tester l'existence de relations de dominance en pauvreté bidimensionnelle. Il s'agit d'un test d'intersection-union qui permet d'analyser sans ambiguïté la dominance stricte. L'étude se focalise sur 6 pays de l'UEMOA, à savoir: le Bénin, le Burkina Faso, la Côte d'Ivoire, le Mali, le Niger et le Togo. On note entre eux de grandes disparités avec notamment la Côte d'Ivoire qui représente près de 40% de la production de l'Union. Nous comparons également la pauvreté en milieu rural à celle en milieu urbain. Il est possible, dans une situation de faiblesse généralisée en terme de revenus, que les individus qui ont un accès direct aux produits agricoles en milieu rural soient mieux nourris que les citadins qui eux sont souvent obligés de payer davantage pour y accéder. L'analyse de dominance inclut aussi bien la dominance de premier ordre que celle d'ordres supérieurs.

La section 2 présente la méthode d'estimation des différents indicateurs. La section 3 définit le concept de dominance stochastique bidimensionnelle et les techniques pour la tester. La section 4 présente l'analyse empirique. Elle décrit aussi bien la nature des données que les principaux résultats de la comparaison de pauvreté. La dernière section conclut le papier.

## **2 Estimation des indicateurs de pauvreté**

Il s'agit d'abord de déterminer les deux indicateurs de bien-être qui vont servir à l'analyse bidimensionnelle de la pauvreté. Le premier indicateur est le statut nutritionnel. Le second indicateur sera basé sur deux approches d'inertie de la pauvreté multidimensionnelle, notamment l'Analyse de Correspondances Multiples (ACM) et une méthode de vraisemblance.

## 2.1 Le calcul de l'indicateur nutritionnel

Plusieurs indicateurs nutritionnels sont utilisés dont les principaux sont l'indice poids-pour-taille, l'indice taille-pour-âge et l'indice poids-pour-âge. Ces indices sont calculés en comparant le poids ou la taille d'un enfant enquêté avec la valeur moyenne ou médiane pour une population de référence. Sahn et Stifel (2002) privilégient le second indice comme indicateur du niveau de vie des ménages. Ils justifient ce choix par le fait que l'indice taille-pour-âge ne soit pas affecté par les épisodes de stress, de diarrhée, de paludisme et autres affections impondérables qui modifient temporairement le statut sanitaire et nutritionnel de l'individu. Il traduit plutôt une sorte d'accumulation en matière de santé et de nutrition que peuvent améliorer des actions publiques considérables comme les programmes de vaccination, de lutte contre les endémies et autres maladies chroniques et les programmes d'assainissement.

Le calcul du  $Z\_score$  est donné par la formule suivante :

$$Z\_score_i = \frac{T_i - T_{médiane}}{\sigma_T} \quad (1)$$

où  $T_i$  est la taille de l'enfant,  $T_{médiane}$  la taille médiane pour une population de référence d'enfants bien nourris et en bonne santé et  $\sigma_T$ , l'écart-type de la population de référence. Les enfants concernés sont ceux âgés de 3 à 35 mois. Le calcul tient compte également du sexe des enfants. Par convention, un enfant dont le  $Z\_score$  se retrouve en dessous de -2 (le seuil de pauvreté nutritionnelle) est considéré comme souffrant de malnutrition.

## 2.2 L'estimation de l'indicateur de la richesse

L'approche d'inertie sera utilisée pour dériver l'indicateur de richesse. Il s'agit d'une approche pratique dont le but est de réduire dans la mesure du possible l'arbitraire dans le calcul de l'indicateur<sup>1</sup>. En considérant  $N$  individus indicés par  $i = 1, \dots, N$ , et  $J$  attributs pour chacun d'eux, avec chaque attribut  $j = 1, \dots, J$ , il s'agit de représenter par un nuage de points autour d'un centroïde (moyennes pondérées) les  $N$  individus dans l'espace des  $J$  attributs avec un poids associé à chaque point. L'inertie totale du nuage de points, dépendamment de la métrique choisie, est la somme pondérée des distances de chaque point par rapport au centroïde.

---

<sup>1</sup>Asselin (2002) en fait une revue détaillée.

Il s'agit alors de construire un indicateur de la richesse pour chaque ménage basé sur la somme pondérée de différents attributs de bien-être. Soit  $X_i$  l'indicateur de richesse pour le ménage  $i$ ,  $x_{ij}$  sa dotation en attribut  $j$  et  $\alpha_j$  le poids de chaque attribut, l'expression de  $X_i$  est donnée par:

$$X_i = \alpha_1 x_{i1} + \dots + \alpha_J x_{iJ} \quad (2)$$

Afin de réduire l'arbitraire dans le choix de la méthode de réduction de données, deux approches sont utilisées: d'abord l'ACM usuelle et ensuite une méthode basée sur la maximisation de la vraisemblance. Les techniques de l'ACM sont assez connues et ne seront donc pas développées ici. Pour ce qui concerne l'autre méthode, qui s'appuie sur l'analyse factorielle confirmatoire avec variables qualitatives, la littérature propose essentiellement deux approches: l'approche de la variable de réponse sous-jacente et l'approche de la fonction de réponse (Moustaki, 2000; Jöreskog et Moustaki, 2001).

Dans la première approche, on suppose que chaque variable qualitative est générée par une variable de réponse inobservée et continue (variable latente) qui suit une distribution normale. Cette approche a été adoptée par plusieurs auteurs qui ont estimé le modèle en deux étapes (Lee et *al.*, 1992) ou en trois (Muthèn, 1983; Jöreskog, 1994).

En supposant que  $J$  est le nombre de variables et donc plusieurs configurations possibles de  $J$  réponses, la seconde approche spécifie une distribution conditionnelle pour chaque configuration des  $J$  réponses comme une fonction de facteurs latents, en faisant l'hypothèse que les réponses aux différentes variables sont indépendantes<sup>2</sup>.

Jöreskog et Moustaki (2001) proposent trois démarches basées sur ces deux approches qui ont l'avantage d'estimer les paramètres en une seule étape. La méthode adoptée dans le présent papier est celle basée sur la première approche. Elle dérive de l'approche dite de la normale multivariée sous-jacente (NMS). On considère le modèle suivant:

$$x_{ij}^* = \lambda_j f_i + \varepsilon_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, J \text{ et } i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

Dans ce modèle, le facteur commun  $f_i$  pour chaque ménage  $i$  est inobservable et représente en quelque sorte le niveau de bien-être du ménage. Le terme d'erreur  $\varepsilon_{ij}$ , également inobservé, est une composante spécifique à chaque ménage. La différence avec le modèle linéaire de Sahn et Stifel (2000, 2003) est que

---

<sup>2</sup>Pour en savoir plus sur cette approche, voir entre autres Bartholomew (1983, 1984) et Moustaki (2000).

la variable de réponse continue  $x_{ij}^*$  est inobservée. Le modèle ci-dessus diffère également du modèle à variable dépendante limitée standard par l'inobservation de  $f_i$ . En laissant tomber l'indice  $i$  sans perte de généralité,  $x_j^*$  et  $x_j$  sont liées comme suit:

$$x_j = a \iff \gamma_{a-1}^{(j)} < x_j^* \leq \gamma_a^{(j)}, \quad a = 1, 2, \dots, m_j \quad (4)$$

où  $\gamma_0^{(j)} = -\infty, \gamma_1^{(j)} < \gamma_2^{(j)} < \dots < \gamma_{m_j-1}^{(j)}, \gamma_{m_j}^{(j)} = +\infty$  sont des paramètres de seuil. Ainsi pour  $m_j$  catégories de réponses pour une variable donnée, il y a  $m_j - 1$  paramètres de seuil. Comme la moyenne et la variance de  $x_j^*$  ne sont pas identifiées, on les pose respectivement égales à 0 et 1. On suppose également que  $f$  et  $\varepsilon_j$  sont indépendants et normalement distribués avec  $f \sim N(0, 1)$  et  $\varepsilon_j \sim N(0, \psi_j)$ . Comme les deux premiers moments de  $x_j^*$  ont été normalisés respectivement à 0 et 1, alors  $\psi_j = 1 - \lambda_j^2$ . On suppose que  $x_1^*, \dots, x_J^*$  suit une distribution normale multivariée de moyennes nulles, de variances unitaires et possédant une matrice de corrélation  $\Gamma = (\rho_{jk})$  avec  $\rho_{jk} = \lambda_j \lambda_k$ . Les paramètres à estimer sont les paramètres de seuil  $\gamma_a^{(j)}$  et les coefficients des facteurs  $\lambda_j$ , avec  $j = 1, 2, \dots, J$  et  $a = 1, 2, \dots, m_j - 1$ . Cela fait un total de paramètres à estimer de  $\sum_{j=1}^J m_j$ . Soit  $\theta$  l'ensemble des paramètres à estimer et soit  $r$  une des configurations possibles des  $J$  réponses respectives au niveau des  $J$  variables qualitatives, la probabilité de réalisation d'une configuration est donnée par:

$$\pi_r(\theta) = P_r(x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_J = a_J) = \int_{\gamma_{a_1-1}^{(1)}}^{\gamma_{a_1}^{(1)}} \int_{\gamma_{a_2-1}^{(2)}}^{\gamma_{a_2}^{(2)}} \dots \int_{\gamma_{a_J-1}^{(J)}}^{\gamma_{a_J}^{(J)}} \phi_J(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_J | \Gamma) d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, \dots, d\varepsilon_J. \quad (5)$$

On remplace  $\pi_r(\theta)$  par son expression dans l'équation de la fonction de vraisemblance suivante:

$$L_{NMS}(\theta) = \sum_r P_r \ln \pi_r(\theta), \quad (6)$$

avec  $P_r = \frac{n_r}{N}$ , où  $n_r$  est le nombre de réalisations de la configuration  $r$  et  $N$  la taille de l'échantillon questionné. En maximisant  $L(\theta)$  par rapport à  $\theta$ , on obtient les estimateurs du maximum de vraisemblance à information complète. Cependant, lorsque  $J > 4$ , l'estimation n'est plus numériquement faisable à cause de la faible puissance relative de la plupart des ordinateurs actuels. C'est pourquoi Jöreskog et Moustaki (2001) proposent d'estimer plutôt une approche basée sur la

normale bivariée sous-jacente (NBS). Ici, au lieu de s'intéresser aux probabilités des différentes configurations des  $J$  réponses, l'on se contente des probabilités standards  $\pi_a^{(j)}$  d'obtenir, pour une variable  $j$ , une réponse dans la catégorie  $a$ , ainsi que des probabilités  $\pi_{ab}^{(jh)}$  d'avoir simultanément une réponse dans la catégorie  $a$  pour la variable  $j$  et une réponse dans la catégorie  $b$  pour la variable  $h$ . Elles sont respectivement exprimées comme suit:

$$\pi_a^{(j)}(\theta) = \int_{\gamma_{a-1}^{(j)}}^{\gamma_a^{(j)}} \phi(u) du \quad (7)$$

$$\pi_{ab}^{(jh)}(\theta) = \int_{\gamma_{a-1}^{(j)}}^{\gamma_a^{(j)}} \int_{\gamma_{b-1}^{(h)}}^{\gamma_b^{(h)}} \phi_2(u, v | \rho_{jh}) dudv. \quad (8)$$

$\phi(u)$  est une fonction de densité normale standard tandis que  $\phi_2(u, v | \rho)$  est une fonction de densité normale bivariée de corrélation  $\rho$ . Les paramètres sont alors estimés par la maximisation de la fonction suivante:

$$L_{NBS}(\theta) = \sum_{j=1}^J \sum_{a=1}^{m_j} P_a^{(j)} \ln \pi_a^{(j)}(\theta) + \sum_{j=2}^J \sum_{h=1}^{j-1} \sum_{a=1}^{m_j} \sum_{b=1}^{m_h} P_{ab}^{(jh)} \ln \pi_{ab}^{(jh)}(\theta). \quad (9)$$

Même si cette technique ne s'appuie pas sur une base théorique solide, Jöreskog et Moustaki (2001) trouvent qu'elle donne les mêmes résultats que les autres démarches à information complète basées sur l'approche de la fonction de réponse. De plus, elle est moins coûteuse en terme de temps d'exécution du programme économétrique et s'applique bien quand le nombre de variables ordonnées est grand.

L'étape ultérieure consiste à estimer les scores factoriels. Dans le cas de variables ordonnées, il n'existe pas de relation linéaire entre les facteurs et les variables observées. Pour estimer alors le score, Shi et Lee (1997) proposent une approche bayésienne basée sur la distribution a posteriori des facteurs. Dans ce qui suit,  $f$  est un scalaire,  $\lambda$ ,  $x$  et  $x^*$  des vecteurs ( $J \times 1$ ) et  $\psi$  une matrice diagonale ( $J \times J$ ). Si l'on suppose que  $p(f)$  est la fonction de densité de  $f$ ,  $p(x^*|f)$  la fonction de densité conditionnelle de  $x^*$  par rapport à  $f$ , et  $\Pr(x|f)$  la probabilité conditionnelle de  $x$  par rapport à  $f$ , la distribution conditionnelle de  $f$  par rapport à  $x$  est donnée, d'après le théorème de Bayes, par:

$$p(f|x) = \frac{p(f) \Pr(x|f)}{\int_R p(f) \Pr(x|f) df}. \quad (10)$$

A partir de ce théorème, on peut dériver l'estimateur du score par:

$$X_i = \hat{f}_B = E(f|x) = \frac{1}{B} \lambda' \psi^{-1} x_W^*. \quad (11)$$

Les différentes étapes ainsi que les expressions de  $B$  et  $x_W^*$  sont données en annexe.

### 3 Analyse de la dominance stochastique bidimensionnelle

Les techniques présentées ici sont des extensions multidimensionnelles de l'approche de la dominance stochastique développée par Atkinson (1987) et Foster et Shorrocks (1988*a,b,c*) dans le cadre unidimensionnel. Elles permettent de procéder à des comparaisons ordinales de pauvreté (voir par exemple Bourguignon et Chakravarty (2002) et Atkinson et Bourguignon (1982)). L'analyse multidimensionnelle introduit une nouvelle considération : la distinction entre l'approche de l'union et celle de l'intersection dans l'identification des pauvres (Atkinson, 2003; Bourguignon et Chakravarty, 2003; Duclos et *al.*, 2006).

#### 3.1 La dominance de premier ordre

L'approche adoptée ici est celle de Duclos et *al.* (2006) qui définissent un indice additif<sup>3</sup> de pauvreté compatible avec les trois types de seuil (intersection, union et intermédiaire):

$$P(\lambda) = \int \int_{\Lambda(\lambda)} \pi(x_1, x_2; \lambda) dF(x_1, x_2), \quad (12)$$

où  $\lambda(x_1, x_2)$  est un indicateur résumé du bien-être,  $\lambda(x_1, x_2) = 0$  la frontière ou le seuil de pauvreté et  $\Lambda(\lambda)$ , l'ensemble des pauvres dépendamment bien entendu du type de seuil retenu.

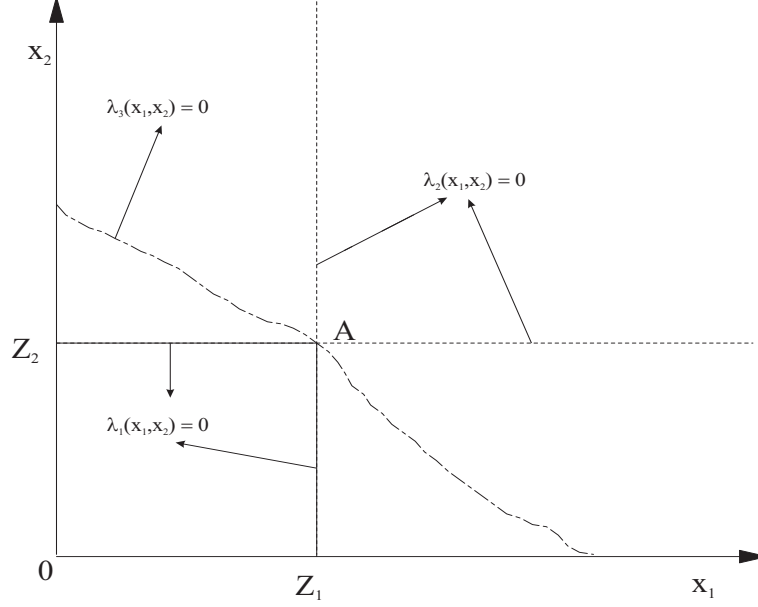
Ils présentent alors un exemple d'indice de pauvreté multidimensionnelle qui n'est autre qu'une extension bidimensionnelle de l'indice FGT de Foster et *al.* (1984):

$$P_{\alpha_1, \alpha_2}(z_1, z_2) = \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} (z_1 - x_1)^{\alpha_1} (z_2 - x_2)^{\alpha_2} dF(x_1, x_2). \quad (13)$$

---

<sup>3</sup>Dans le sens de la décomposabilité par sous-groupes.

Figure 1: Définitions d'union, d'intersection et intermédiaire du seuil de pauvreté



$\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$  captent l'aversion à l'inégalité vis-à-vis de la pauvreté dans les deux dimensions. Ils donnent certaines interprétations de  $P_{\alpha_1, \alpha_2}(z_1, z_2)$  pour diverses combinaisons de  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ . Ils utilisent cet indice pour générer des surfaces de dominance stochastique à deux dimensions, ce qui est utile pour des comparaisons robustes de pauvreté. Les ordres de dominance étant  $s_1 = 1 + \alpha_1$  et  $s_2 = 1 + \alpha_2$ , la surface de dominance est donnée par:

$$\Delta P^{s_1 s_2}(z_1, z_2) = \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} (z_1 - x_1)^{s_1 - 1} (z_2 - x_2)^{s_2 - 1} dH(x_1, x_2). \quad (14)$$

Pour dériver la dominance stochastique bidimensionnelle du premier ordre, Duclos et *al.* (2006) fournissent cependant une classe de mesures  $\Psi^{1,1}(\lambda^*)$  plus générale que la forme FGT et compatible avec tous les types de seuil:

$$\Psi^{1,1}(\lambda^*) = \left\{ P(\lambda) \left| \begin{array}{l} \Lambda(\lambda) \subset \Lambda(\lambda^*) \\ \pi(x_1, x_2; \lambda) = 0 \text{ si } \lambda(x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial \pi(x_1, x_2; \lambda)}{\partial x_1} \leq 0 \text{ et } \frac{\partial \pi(x_1, x_2; \lambda)}{\partial x_2} \leq 0 \forall x_1, x_2 \\ \frac{\partial^2 \pi(x_1, x_2; \lambda)}{\partial x_1 \partial x_2} \geq 0 \forall x_1, x_2 \end{array} \right. \right\} \quad (15)$$

La première ligne définit l'ensemble maximal des pauvres. La seconde indique la continuité des indices de pauvreté le long de la frontière de pauvreté. La troisième ligne provient de l'axiome de *monotonie* et suggère que les indices sont faiblement décroissants dans les attributs  $x_1$  et  $x_2$ . La dernière ligne renvoie à l'axiome de la *non décroissance de la pauvreté*. Cette hypothèse introduit cependant des restrictions dans la classe  $\Psi^{1,1}(\lambda^*)$  dans la mesure où, dépendamment de la nature des attributs, il est possible qu'on ait plutôt une relation de complémentarité comme l'ont révélé Bourguignon et Chakravarty (2002). Le théorème 1 de Duclos et al. (2006) établit alors la condition de dominance de premier ordre qui suggère que, pour des classes de mesures  $\Psi^{1,1}(\lambda^*)$ , la pauvreté sera plus forte en  $F$  qu'en  $G$ , ou que  $G$  domine  $F$  en pauvreté, si et seulement si  $\Delta P^{1,1}(x_1, x_2) > 0 \forall (x_1, x_2) \in \Lambda(\lambda^*)$ .

### 3.2 La dominance stochastique d'ordre supérieur

Il est aussi possible, en s'inspirant d'Atkinson et Bourguignon (1982), de définir les conditions de dominance stochastique de second ordre pour les cas de substituabilité et de complémentarité. Mais cela requiert des hypothèses fortes sur les signes des dérivées d'ordre supérieur (troisième et quatrième). Dans les classes de dominance spécifiées par Duclos et al. (2006), l'on peut augmenter l'ordre dans l'une ou l'autre des dimensions ou dans les deux simultanément. Ainsi, l'on peut définir les classes  $\Psi^{2,1}(\lambda^*)$ ,  $\Psi^{2,2}(\lambda^*)$ ,  $\Psi^{1,2}(\lambda^*)$  etc. La première est explicitée par Duclos et al. comme suit:

$$\Psi^{2,1}(\lambda^*) = \left\{ P(\lambda) \left| \begin{array}{l} P(\lambda) \in \Psi^{1,1}(\lambda^*) \\ \frac{\partial \pi(x_1, x_2; \lambda)}{\partial x_1} = 0 \text{ si } \lambda(x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial^2 \pi(x_1, x_2; \lambda)}{(\partial x_1)^2} \geq 0 \forall x_1 \\ \frac{\partial^3 \pi(x_1, x_2; \lambda)}{(\partial x_1)^2 \partial x_2} \leq 0 \forall x_1, x_2 \end{array} \right. \right\} \quad (16)$$

La première ligne signifie que les conditions de la classe  $\Psi^{1,1}(\lambda^*)$  sont respectées. La seconde suggère que la dérivée première par rapport à l'attribut  $x_1$  est continue le long de la frontière de pauvreté. La troisième indique que le *principe de transfert* (PTUD) est vérifié au niveau de l'attribut  $x_1$ . La dernière ligne quant à elle révèle que l'effet égalisateur inhérent au transfert décroît faiblement en fonction de  $x_2$ .

D'après leur théorème 2, il y a dominance stochastique, ou  $G$  domine  $F$  en pauvreté, pour la classe  $\Psi^{2,1}(\lambda^*)$  si et seulement si  $\Delta P^{2,1}(x_1, x_2) > 0 \forall (x_1, x_2) \in \Lambda(\lambda^*)$ .

### 3.3 Inférence statistique

La démarche proposée permet de tester la non dominance de la distribution  $F$  par la distribution  $G$ . La non dominance implique qu'il existe un point  $(z_1, z_2)$  pour lequel  $\Delta P^{s_1 s_2}(z_1, z_2) \leq 0$ . Formellement, on teste l'hypothèse:

$$H_0 : \Delta P^{s_1 s_2}(z_1, z_2) \leq 0 \text{ pour certains couples } (z_1, z_2)$$

versus

$$H_1 : \Delta P^{s_1 s_2}(z_1, z_2) > 0 \quad \forall (z_1, z_2).$$

Le ratio de vraisemblance empirique proposé par Davidson et Duclos (2006) dans le contexte de distributions univariées sera utilisé. Cette démarche permet de conclure sans équivoque à la dominance si les tests le suggèrent. Le ratio est obtenu en résolvant le problème de maximisation de la fonction de vraisemblance empirique suivante:

$$\max_{P_i^F, P_j^G} \sum_i n_i^F \log P_i^F + \sum_j n_j^G \log P_j^G \quad (17)$$

sujet à

$$\sum_i P_i^F = 1, \quad \sum_j P_j^G = 1$$

et

$$\sum_i P_i^F (z_1 - x_{i1}^F)^{s_1-1} (z_2 - x_{i2}^F)^{s_2-1} I(x_{i1}^F \leq z_1, x_{i2}^F \leq z_2) =$$

$$\sum_j P_j^G (z_1 - x_{j1}^G)^{s_1-1} (z_2 - x_{j2}^G)^{s_2-1} I(x_{j1}^G \leq z_1, x_{j2}^G \leq z_2)$$

$n_i^F$  et  $n_j^G$  représentent les nombres de réalisations égales respectivement à  $(x_{i1}^F, x_{i2}^F)$  et  $(x_{j1}^G, x_{j2}^G)$ .  $I(\cdot)$  est une fonction indicatrice qui prend la valeur 1 lorsque la condition est vérifiée et 0 sinon.  $s_1$  et  $s_2$  constituent les ordres de dominance tandis que  $P_i^F$  et  $P_j^G$  sont les probabilités empiriques. Le ratio de vraisemblance mesure la distance entre le maximum de la vraisemblance non contrainte et le maximum de la vraisemblance contrainte ci-dessus présentée. Une valeur de 0 signifie que la contrainte n'est pas liante et qu'on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle de non dominance. Une valeur positive indique plutôt la possibilité de dominance, ce qui devrait alors être testé formellement. Comme l'on

s'intéresse à la non dominance de  $F$  par  $G$ , il n'y a pas de coût à contraindre l'égalité  $\Delta P^{s_1 s_2}(z_1, z_2) = 0$  lorsque  $\Delta P^{s_1 s_2}(z_1, z_2) \leq 0$ . Dans ce cas la contrainte n'est pas liante et le ratio de vraisemblance a une valeur nulle. L'expression du ratio de vraisemblance  $LR(z_1, z_2)$  peut alors être résumée comme suit:

$$LR(z_1, z_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Delta \hat{P}^{s_1 s_2}(z_1, z_2) \leq 0 \\ LR & \text{sinon} \end{cases} \quad (18)$$

L'expression du ratio  $LR$  sera développée plus loin. Le test étant basé sur une formulation de type intersection-union, pour les différentes valeurs  $(z_1, z_2)$  du support  $[\underline{z}_1, \bar{z}_1] \otimes [\underline{z}_2, \bar{z}_2]$ , la statistique est donnée par le minimum de  $LR$ .  $\underline{z}_1$  et  $\underline{z}_2$  sont les bornes inférieures du support tandis que  $\bar{z}_1$  et  $\bar{z}_2$  en sont les bornes supérieures. Pour la dominance de premier ordre, on a  $s_1 = s_2 = 1$  et la seconde contrainte du problème de maximisation (équation 24) devient:

$$\sum_i P_i^F I(x_{i1}^F \leq z_1, x_{i2}^F \leq z_2) = \sum_j P_j^G I(x_{j1}^G \leq z_1, x_{j2}^G \leq z_2) \quad (19)$$

La solution analytique du problème de maximisation donnent les expressions de nouvelles probabilités pour les distributions  $F$  et  $G$ :

$$P_i^F = \frac{n_i^F I_i(z_1, z_2)}{\varpi} + \frac{n_i^F (1 - I_i(z_1, z_2))}{\psi} \quad (20)$$

$$P_j^G = \frac{n_j^G I_j(z_1, z_2)}{N - \varpi} + \frac{n_j^G (1 - I_j(z_1, z_2))}{N - \psi} \quad (21)$$

avec:

$$I_i(z_1, z_2) \equiv I(x_{i1}^F \leq z_1, x_{i2}^F \leq z_2), \quad I_j(z_1, z_2) \equiv I(x_{j1}^G \leq z_1, x_{j2}^G \leq z_2),$$

$$\varpi = \frac{N \times N_F(z_1, z_2)}{N_F(z_1, z_2) + N_G(z_1, z_2)}, \quad \psi = \frac{N \times M_F(z_1, z_2)}{M_F(z_1, z_2) + M_G(z_1, z_2)},$$

$$N_F(z_1, z_2) = \sum_i n_i^F I_i(z_1, z_2), \quad N_G(z_1, z_2) = \sum_j n_j^G I_j(z_1, z_2), \quad N = N_F + N_G,$$

$$M_F(z_1, z_2) = N_F - N_F(z_1, z_2), \quad M_G(z_1, z_2) = N_G - N_G(z_1, z_2)$$

Le ratio de vraisemblance empirique est obtenu en multipliant par 2 le minimum de la différence entre la vraisemblance non contrainte et la vraisemblance contrainte. On obtient alors:

$$\frac{1}{2}LR(z_1, z_2) = \left\{ \begin{array}{l} N \log N - N_F \log N_F - N_G \log N_G \\ + N_F(z_1, z_2) \log N_F(z_1, z_2) + N_G(z_1, z_2) \log N_G(z_1, z_2) \\ + M_F(z_1, z_2) \log M_F(z_1, z_2) + M_G(z_1, z_2) \log M_G(z_1, z_2) \\ - (N_F(z_1, z_2) + N_G(z_1, z_2)) \log (N_F(z_1, z_2) + N_G(z_1, z_2)) \\ - (M_F(z_1, z_2) + M_G(z_1, z_2)) \log (M_F(z_1, z_2) + M_G(z_1, z_2)) \end{array} \right\} \quad (22)$$

D'après le théorème 1 de Davidson et Duclos (2006), sous l'hypothèse nulle, la statistique  $LR(z_1, z_2)$  est asymptotiquement équivalente au carré de la statistique  $t$  utilisée par Kaur et *al.* (1994). Cette statistique en bidimensionnel est donnée par:

$$t^2(z_1, z_2) = \frac{N_F N_G \left( \widehat{F}(z_1, z_2) - \widehat{G}(z_1, z_2) \right)^2}{N_G \widehat{F}(z_1, z_2) \left( 1 - \widehat{F}(z_1, z_2) \right) + N_F \widehat{G}(z_1, z_2) \left( 1 - \widehat{G}(z_1, z_2) \right)} \quad (23)$$

Les tests de bootstrap sont réalisés suivant le procédé décrit par Davidson et Duclos (2006). Lorsqu'il y a existence de dominance dans l'échantillon, on calcule le minimum de la statistique de test  $LR$  et on calcule les probabilités qui lui sont associées qui permettent aux échantillons de satisfaire tout juste l'hypothèse nulle. Ces probabilités sont utilisées pour générer  $T = 399$  échantillons de bootstrap pour les deux distributions. Ensuite l'on calcule, pour chaque paire d'échantillon, la statistique  $LR_t$  (avec  $t = 1, \dots, T$ ) donnée par (22). Enfin, la valeur  $p_T$  du bootstrap est calculée comme étant la proportion de statistiques  $LR_t$  supérieures à  $LR$ .

Pour les ordres de dominance supérieurs, il n'existe pas de solution analytique. The details are provided in the Appendix.

## 4 Analyse empirique

### 4.1 Les données

Les données proviennent essentiellement des enquêtes démographiques et santé (EDS). Il s'agit d'enquêtes nationales auprès des ménages en milieux urbain et rural. Six pays de l'UEMOA sont concernés par l'étude à savoir : le Bénin, le Burkina, la Côte d'Ivoire, le Mali, le Niger, et le Togo. Le Sénégal a été exclu parce

que, pour la période considérée, les données nutritionnelles n'ont pas été collectées. En effet, l'étude se focalise sur les enquêtes menées au milieu des années 90 (1996-98) dans ces pays. On y retrouve essentiellement 3 questionnaires à savoir : le questionnaire ménage, le questionnaire individuel femme et le questionnaire individuel homme. L'enquête individuelle femme s'adresse aux femmes âgées de 15 à 49 ans tandis que celle des hommes concerne en général les hommes de 15 à 59 ans. Les principales caractéristiques de ces enquêtes sont résumées dans le tableau 1 en annexe 2.

Ces enquêtes fournissent des informations qui permettent d'estimer l'indicateur nutritionnel ( $Z\_score$ ) et l'indice de la richesse ( $X$ ). Pour calculer le  $Z\_score$ , on utilise les données sur la taille des enfants, leur âge, leur sexe et sur les valeurs standards pour une population de référence. Pour cela, on considère uniquement les ménages pour lesquels les données nutritionnelles sur les enfants ont été collectées. Quant au  $X$ , pour l'estimer l'on se sert des informations sur la possession de biens durables (radio, télévision, réfrigérateur, bicyclette, moto, car) et sur l'accès à d'autres biens et services (électricité, type de toilette, qualité du plancher, eau potable, éducation). Toutes les variables sont qualitatives d'où l'utilisation de l'ACM et de l'approche NBS.

L'échantillon global a été utilisé pour générer les scores factoriels. Pour la méthode NBS, l'on estime d'abord les paramètres grâce à la maximisation de l'équation (9). Ces estimés sont alors considérés pour calculer les scores factoriels d'après l'équation (10). Pour l'intégration de Monte Carlo, 100000 vecteurs aléatoires ont été générés chacun selon la loi uniforme. Les deux méthodes de réduction de données ont également tenu compte du poids échantillonnal de chaque observation.

Les principales statistiques décrivant les deux indices calculés sont présentées dans les tableaux 2 et 3 en annexe 2. La Côte d'Ivoire, le Togo et le Mali affichent en moyenne les meilleurs niveaux de bien-être alors que Le Burkina et le Niger enregistrent quant à eux les plus faibles indices.

Le tableau 4 en annexe 2 présente une analyse de sensibilité de l'indice de richesse. La deuxième ligne représente les quartiles. Il s'agit de savoir les indices estimés décrivent assez bien le phénomène de pauvreté. Cela est le cas lorsque le pourcentage de ménages qui n'ont pas accès à un bien diminue quand on passe du plus petit quartile au plus grand. L'ACM et l'approche NBS donnent tous deux des indices de richesse qui semblent bien appréhender la pauvreté. Par ailleurs, le tableau 5 établit que ces deux indices sont corrélés avec un coefficient de corrélation pour l'échantillon global de 96%. Pour l'analyse de dominance, l'estimateur obtenu par l'approche NBS est considéré pour la présentation des résultats. Toute-

fois, l'existence de dominance n'est admise que si elle est confirmée pour les deux méthodes.

## 4.2 Résultats des tests de dominance

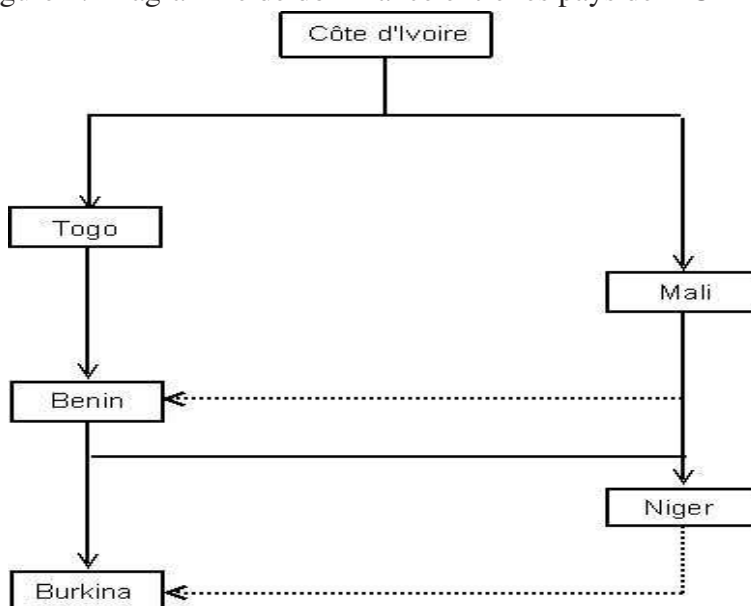
Pour effectuer en pratique des comparaisons robustes de pauvreté, on définit une grille de points  $(z_1, z_2)$  plutôt que de considérer l'ensemble des points des deux distributions  $F$  et  $G$ . En théorie, s'il est possible de considérer l'ensemble de ces points, cela se révèle difficile en pratique lorsque les distributions sont de tailles assez grandes. De plus, le choix d'une grille de points permet d'analyser plus aisément, à travers un tableau, les surfaces de dominance. L'on peut alors définir des intervalles  $[z_1^-, z_1^+] \subset [z_1, \bar{z}_1]$  et  $[z_2^-, z_2^+] \subset [z_2, \bar{z}_2]$  sur lesquels on peut tester la dominance. Pour constituer la grille, l'on considère 20 quantiles pour l'indice de richesse et 10 déciles pour l'indice nutritionnel, qu'on détermine après fusion des deux distributions à comparer. Au lieu de considérer les quantiles en tant que tels, la grille est déterminée en prenant plutôt les moyennes de chaque intervalle de quantile et de décile. Cela permet de ne pas exclure spontanément le point  $[\bar{z}_1, \bar{z}_2]$  pour lequel l'indice de pauvreté au premier ordre aurait été de facto de 100% pour les deux distributions si l'on avait considéré simplement les quantiles. Cela donne un total de 200 points. Avec les 6 pays, il y a 15 combinaisons possibles et donc 15 relations de dominance possibles.

Le tableau 6 présente les résultats des tests de dominance du premier ordre. Le premier pays représente la distribution  $F$  et le second la distribution  $G$ . Le test est réalisé sous l'hypothèse nulle que  $G$  ne domine pas  $F$ . Les résultats révèlent l'existence de 12 relations de dominance. Hormis le cas BK-CI qui est une relation de dominance complète, les 11 autres relations de dominance sont restreintes en ce sens qu'il a fallu préalablement exclure certains points de la grille (dans les parties inférieures et/ou supérieures) pour obtenir la dominance. Le tableau donne également le pourcentage d'individus situés dans la grille de dominance  $[z_1^-, z_1^+] \otimes [z_2^-, z_2^+]$ . Les 3 cas de non dominance relevés ici correspondent à des situations où il existe plusieurs points d'intersection entre les deux distributions de telle sorte qu'il n'a pas été possible d'obtenir des surfaces de dominance assez significatives.

La Côte d'Ivoire (CI) domine tous les pays, suivie du Togo (TG) qui domine également 3 autres pays à savoir le Bénin (BN), le Burkina (BK) et le Niger (NG). Le Bénin et le Mali (ML) dominent quant à eux le Burkina et le Niger. On note l'absence de dominance entre le Mali et le Togo, le Mali et le Bénin et entre le Burkina et le Niger. Les résultats montrent également que deux statistiques util-

isées pour le bootstrap (les statistiques  $LR$  et  $t$ ) sont très proches sinon identiques.

Figure 2: Diagramme de dominance entre les pays de L'UEMOA

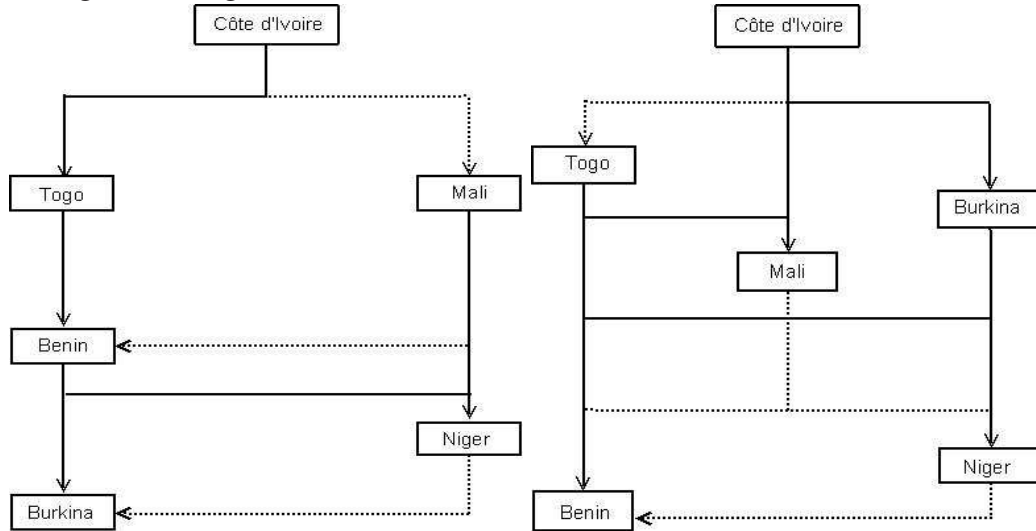


Le tableau 7 montre que le milieu urbain domine en pauvreté le milieu rural. Ceci s'est avéré aussi bien dans chacun des pays que pour l'échantillon global. Dans ce cas ci, 4 des 7 relations de dominance établies sont des dominances complètes notamment dans le cas du Burkina, du Mali, du Togo et de l'échantillon global. Les autres relations de dominance sont restreintes.

L'analyse des ordres de dominance supérieurs confirme la non dominance entre le Mali et le Togo (confère le tableau 8). Cela n'est pas le cas pour les deux autres relations puisque le Mali domine stochastiquement le Bénin au second ordre tandis que le Niger domine le Burkina au troisième ordre. Ici également la non dominance implique l'intersection entre les distributions. Le graphique 2 indique le classement des pays en terme de dominance. Les flèches en continu traduisent la dominance au premier ordre alors que celles en pointillés représentent les dominances d'ordres supérieurs. La position de chaque pays par rapport au sommet indique sa position eu égard au niveau de pauvreté. Si au sommet on retrouve la Côte d'Ivoire qui affiche le plus faible niveau de pauvreté, à l'inverse en bas on retrouve le Burkina Faso qui présente le niveau le plus élevé.

Pour affiner l'analyse, on fait une décomposition de la dominance en tenant

Figure 3: Diagrammes de dominance selon la localisation (rural vs urbain)



compte de la localisation des individus. On obtient ainsi deux diagrammes dont l'un présente les relations de dominance en milieu rural et l'autre celles en milieu urbain. Le graphique 3 présente ces deux diagrammes dont celui de gauche est celui du milieu rural tandis que celui de droite concerne le milieu urbain. L'on observe que les relations de dominance en milieu rural sont quasiment identiques à celles du graphique 2. La seule différence est que la zone rurale de la Côte d'Ivoire domine celle du Mali à l'ordre 2, et non à l'ordre 1. Les résultats de la dominance pour le milieu urbain sont beaucoup plus surprenants. En effet, le Burkina qui était dominé précédemment par tous les pays n'est plus dominé que par la Côte d'Ivoire. Le Bénin apparaît cette fois-ci comme le plus pauvre au niveau de la population citadine. Cette situation peut signifier un déséquilibre important entre le niveau de vie en milieu rural et celui en milieu urbain pour certains pays comme le Burkina.

## 5 Conclusion

La dominance stochastique a été le plus souvent analysée dans le cadre de distributions univariées. Plus récemment, Bourguignon et Chakravarty (2002)

proposent un cadre théorique de dominance stochastique en pauvreté multidimensionnelle. Crawford (2005) et Duclos et al (2006) effectuent des études empiriques dans ce sens. Le présent papier s'inscrit dans cette lignée, en recourant au test du ratio de vraisemblance empirique proposée par Davidson et Duclos (2006) pour comparer la pauvreté multidimensionnelle dans six pays de l'UEMOA.

La démarche utilisée ici concilie les deux grandes catégories d'approches de mesures de la pauvreté multidimensionnelle à savoir les approches non axiomatiques et les approches axiomatiques. Ainsi, des méthodes d'analyse factorielle qui relèvent de la première catégorie d'approches ont permis d'estimer un indicateur de richesse à partir des données DHS. Pour réduire l'arbitraire inhérent au choix au choix d'une méthode particulière de réduction de données, deux méthodes d'analyse factorielle ont été utilisées: l'ACM et une méthode basée sur la fonction de vraisemblance. Pour produire les indices de pauvreté bidimensionnelle suggérés par les approches axiomatiques, le statut nutritionnel a été considéré comme une nouvelle dimension associée à l'indicateur de la richesse.

La méthode d'inférence statistique basée sur le ratio de vraisemblance empirique produit des probabilités qui permettent de déterminer les échantillons de bootstrap. Les résultats des tests montrent que sur les 15 relations de dominance possibles, 12 se sont avérées statistiquement robustes au premier ordre, même si, pour la plupart, il s'agit de dominance restreinte. La Côte d'Ivoire domine tous les autres pays en pauvreté. Il y a ensuite le Togo qui domine le reste des pays, excepté le Mali. Pour sa part, le Mali, tout comme le Bénin, domine le Burkina et le Niger. Les tests de dominance d'ordres supérieurs confirment la non dominance entre le Mali et le Togo alors que le Mali et le Niger dominent respectivement le Bénin à l'ordre 2 et le Burkina à l'ordre 3. La pauvreté est aussi apparue plus importante en milieu rurale qu'urbain. Les résultats traduisent également dans certains pays un écart considérable entre la pauvreté rurale et urbaine.

## References

- [1] Anderson, G. (1996), "Nonparametric Test of Stochastic Dominance in Income Distribution", *Econometrica*, 64, 1183-1193.
- [2] Anderson, G. (2005), "Life Expectancy and Economic Welfare: The Example of Africa in the 1990s", *Review of Income and Wealth*, 51, 455-468.
- [3] Asselin, L.-M. (2002), "Multidimensional Poverty: theory", Institut de Mathématique Gauss.

- [4] Atkinson, A. B. (1987), "On the Measurement of Poverty", *Econometrica*, 55, 749-764.
- [5] Atkinson, A. B. (2003), "Multidimensional Deprivation: Constrasting Social Welfare and Counting Approaches", *Journal of Economic Inequality*, 1, 51-65.
- [6] Atkinson, A. B. et F. Bourguignon (1982), "The Comparison of Multidimensional Distributions of Economic Status", *Review of Economic Studies*, XLIX, 183-201.
- [7] Barrett, G. F. et S. G. Donald (2003), "A Comparison of Consistent Non-parametric Tests for Stochastic Dominance", *Econometrica*, 71, 71-104.
- [8] Bartholomew, D. J. (1983), "Latent Variable Models for Ordered Categorical Data", *Journal of Econometrics*, 22, 229-243.
- [9] Bartholomew, D. J. (1984), "The Foundations of Factor Analysis", *Biometrika*, 71, 221-232.
- [10] Bourguignon F. et S. R. Chakravarty (2002), "Multidimensional Poverty Orderings", DELTA Working Paper 2002-22.
- [11] Bourguignon, F. et S. R. Chakravarty (2003), "The Measurement of Multidimensional Poverty", *Journal of Economic Inequality*, 1, 25-49.
- [12] Crawford, I. (2005), "A Nonparametric Test of Stochastic Dominance in Multivariate Distributions", Discussion Papers in Economics, University of Surrey, DP 12/05.
- [13] Davidson, R. (2007), "Testing for Restricted Stochastic Dominance: Some Further Results", mimeo.
- [14] Davidson, R. et J.-Y. Duclos (2000), "Statistical Inference for Stochastic Dominance", *Econometrica*, 68, 1435-1464.
- [15] Davidson, R. et J.-Y. Duclos (2006), "Testing for Restricted Stochastic Dominance", *IZA Discussion Paper No 2047*.
- [16] Drèze, J. et A. Sen (1989), *Hunger and Public Action*, Oxford University Press, Oxford.
- [17] Duclos, J.-Y., D. E. Sahn et S. D. Younger (2006), "Robust Multidimensional Poverty Comparison", *Economic Journal*, 113, 943-968.
- [18] Foster, J. E., J. Greer et E. Thorbecke (1984), "A Class of Decomposable Poverty Measures", *Econometrica*, 52, 761-766.

- [19] Foster, J. E. et A. F. Shorrocks (1988a), "Poverty Orderings", *Econometrica*, 56, 173-177.
- [20] Foster, J. E. et A. F. Shorrocks (1988b), "Poverty Orderings and Welfare Dominance", *Social Choice Welfare*, 5, 179-198.
- [21] Foster, J. E. et A. F. Shorrocks (1988c), "Inequality and Poverty Ordering", *European Economic Review*, 32, 654-662.
- [22] Jöreskog, K. G. (1994), "On the Estimation of Polychoric Correlation and their Asymptotic Covariance Matrix", *Psychometrika*, 59, 381-389.
- [23] Jöreskog, K. G. et I. Moustaki (2001), "Factor Analysis of Ordinal Variables: A Comparison of Three Approaches", *Multivariate Behavioral Research*, 36, 347-387.
- [24] Kaur, A., B. L. S. P. Rao et H. Singh (1994), "Testing for Second-Order stochastic Dominance of Two Distributions", *Econometric Theory*, 10, 849-866.
- [25] Lee, S.-Y., W.-Y. Poon et P. M. Bentler (1992), "Structural Equation Models with Continuous and Polytomous Variables", *Psychometrika*, 57, 89-105.
- [26] Moustaki, I. (2000), "A Latent Variable Model for Ordinal Variables", *Applied Psychological Measurement*, 24, 211-223.
- [27] Muthén, B. (1983), "Latent Variable Structural Equation Modeling with Categorical Data", *Journal of Econometrics*, 22, 43-63.
- [28] Ravallion, M. et S. Chen (1997), "What Can New Survey Data Tell Us About Recent Changes in Distribution and Poverty?", *World Bank Economic Review*, 11, 357-382.
- [29] Sahn, D. E. and D. C. Stifel (2000), "Poverty Comparisons Over Time and Across Countries in Africa", *World Development*, 28, 2123-2155.
- [30] Sahn, D. E. et D. C. Stifel (2002), "Robust Comparisons of Malnutrition in Developing Countries", *American Journal of Agricultural Economics*, 84, 716-735.
- [31] Sahn, D. E. and D. C. Stifel (2003), "Exploring Alternative Measures of Welfare in the Absence of Expenditure Data", *Review of Income and Wealth*, 49, 463-489.
- [32] Sen, A. (1979), "Personal Utilities and Public Judgements: Or what's Wrong with Welfare Economics", *The Economic Journal*, 89, 537-558.

- [33] Sen, A. (1985), *Commodities and Capabilities*, North-Holland, Amsterdam.
- [34] Sen, A. (1987), *The Standard of Living*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [35] Shi, J.-Q. et S.-Y. Lee (1997), “A Bayesian Estimation of Factor Score in Confirmatory Factor Model with Polytomous, Censored or Truncated Data”, *Psychometrika*, 62, 29-50.

## Annexes

### Annexe1: Inférence sur la dominance d'ordres supérieurs

Les statistiques de test sont alors dérivées numériquement. Pour ce faire, l'on considère le Lagrangien ( $\mathcal{L}$ ) associé au problème de maximisation sous contrainte. En posant:

$$\sum_i P_i^F (z_1 - x_{i1}^F)^{s_1-1} (z_2 - x_{i2}^F)^{s_2-1} I(x_{i1}^F \leq z_1, x_{i2}^F \leq z_2) = \sum_i P_i^F \Gamma_{F,i}^{s_1, s_2}() I_i(z_1, z_2)$$

et

$$\sum_j P_j^G (z_1 - x_{j1}^G)^{s_1-1} (z_2 - x_{j2}^G)^{s_2-1} I(x_{j1}^G \leq z_1, x_{j2}^G \leq z_2) = \sum_j P_j^G \Gamma_{G,j}^{s_1, s_2}() I_j(z_1, z_2),$$

alors  $\mathcal{L}$  est donné par:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_i n_i^F \log P_i^F + \sum_j n_j^G \log P_j^G + \lambda_F (1 - \sum_i P_i^F) + \lambda_G (1 - \sum_j P_j^G) \\ & - \mu (\sum_i P_i^F \Gamma_{F,i}^{s_1, s_2}() I_i(z_1, z_2) - \sum_j P_j^G \Gamma_{G,j}^{s_1, s_2}() I_j(z_1, z_2)), \end{aligned} \quad (24)$$

où  $\lambda_F$ ,  $\lambda_G$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  sont des multiplicateurs de Lagrange. Les conditions de premier ordre sont les suivantes :

$$\lambda_F + \lambda_G = N_F + N_G = N,$$

$$P_i^F = \frac{n_i^F}{\lambda + \mu \Gamma_{F,i}^{s_1, s_2}() I_i(z_1, z_2)} \quad \text{et} \quad P_j^G = \frac{n_j^G}{N - \lambda - \mu \Gamma_{G,j}^{s_1, s_2}() I_j(z_1, z_2)}. \quad (25)$$

Avec  $\lambda = \lambda_F$ . Il est alors plus aisé de résoudre le problème en recherchant  $\hat{\lambda}$  et  $\hat{\mu}$  comme suit :

$$\begin{aligned} (\hat{\lambda}, \hat{\mu}) = \arg \min_{\lambda, \mu \in R} & - \sum_i n_i^F \log(\lambda + \mu \Gamma_{F,i}^{s_1, s_2}()) I_i(z_1, z_2)) \\ & - \sum_j n_j^G \log(N - \lambda - \mu \Gamma_{G,j}^{s_1, s_2}()) I_j(z_1, z_2)) \end{aligned} \quad (26)$$

Si on considère que  $(z_1^*, z_2^*)$  est le couple de seuils qui minimise la fonction ci-dessus, les probabilités  $\hat{P}_i^F(z_1^*, z_2^*)$  et  $\hat{P}_j^G(z_1^*, z_2^*)$  sont obtenues en remplaçant, dans l'équation (25),  $\lambda$  et  $\mu$  par leurs estimés. Le ratio de vraisemblance est alors donné par l'expression:

$$LR_{s_1, s_2} = 2 \left\{ \begin{array}{l} -N_F \log N_F - N_G \log N_G + \sum_i n_i^F \log n_i^F + \sum_j n_j^G \log n_j^G \\ - \sum_i n_i^F \log \hat{P}_i^F(z_1^*, z_2^*) - \sum_j n_j^G \log \hat{P}_j^G(z_1^*, z_2^*) \end{array} \right\} \quad (27)$$

L'équivalence entre cette statistique et la statistique  $t$  peut être démontrée à l'aide des méthodes de Davidson (2007).

## Annexe2: La méthode NBS

Considérons:

$$p(f|x) = \frac{p(f) \Pr(x|f)}{\int_R p(f) \Pr(x|f) df},$$

$p(f)$  peut-être dérivée puisque l'on a supposé que  $f$  suit une loi  $N(0, 1)$ . Puisque la distribution conditionnelle de  $x^*$  par rapport à  $f$  suit une loi  $N(f\lambda, \psi)$ , on a:

$$\begin{aligned} \Pr(x|f) = \Pr & \left[ \begin{array}{c} \gamma_{a_1-1}^1 \leq x_1^* \leq \gamma_{a_1}^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{a_J-1}^J \leq x_J^* \leq \gamma_{a_J}^J \end{array} \middle| f \right] = \\ & \int_{\Omega} (2\pi)^{-J/2} |\psi|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{(x^* - f\lambda)' \psi^{-1} (x^* - f\lambda)}{2} \right\} dx^* \end{aligned}$$

avec

$$\Omega = \begin{bmatrix} \gamma_{a_1-1}^1 \leq x_1^* \leq \gamma_{a_1}^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{a_K-1}^K \leq x_K^* \leq \gamma_{a_K}^K \end{bmatrix},$$

$$p(f) \Pr(x|f) = (2\pi)^{-(J+1)/2} |\psi|^{-1/2} \int_{\Omega} \exp \left\{ -\frac{g(x^*)}{2} \right\} dx^*$$

où

$$g(x^*) = f^2 + (x^* - f\lambda)' \psi^{-1} (x^* - f\lambda) = B \left[ f - \frac{1}{B} (\lambda' \psi^{-1} x^*) \right]^2 + x^{*'} A x^*$$

On a:

$$B = 1 + \lambda' \psi^{-1} \lambda$$

$$A = \psi^{-1} - \frac{1}{B} \psi^{-1} \lambda \lambda' \psi^{-1}$$

Lorsqu'on adopte la fonction de perte quadratique, l'estimateur bayésien qui minimise la perte est donné par la moyenne de la distribution a posteriori, en l'occurrence celle du score factoriel.

$$\begin{aligned} E(f|x) &= \int_R f p(f|x) df \\ &= \frac{\int_R f p(f) \Pr(x|f) df}{\int_R p(f) \Pr(x|f) df} \\ &= \frac{\int_R f \int_{\Omega} \exp \left\{ -\frac{g(x^*)}{2} \right\} dx^* df}{\int_R \int_{\Omega} \exp \left\{ -\frac{g(x^*)}{2} \right\} dx^* df} \\ &= \frac{\int_{\Omega} \int_R f \exp \left\{ -\frac{g(x^*)}{2} \right\} df dx^*}{\int_{\Omega} \int_R \exp \left\{ -\frac{g(x^*)}{2} \right\} df dx^*} \\ &= \frac{\int_{\Omega} \exp \left\{ -\frac{x^{*'} A x^*}{2} \right\} \int_R f \exp \left\{ -\frac{\left[ f - \frac{1}{B} (\lambda' \psi^{-1} x^*) \right]^2}{2} \right\} df dx^*}{\int_{\Omega} \exp \left\{ -\frac{x^{*'} A x^*}{2} \right\} \int_R \exp \left\{ -\frac{\left[ f - \frac{1}{B} (\lambda' \psi^{-1} x^*) \right]^2}{2} \right\} df dx^*} \end{aligned}$$

Sans perte de généralités, en déplaçant la moyenne de  $f$  de 0 à  $\frac{1}{B}\lambda'\psi^{-1}x^*$ , il découle des propriétés des fonctions de densité normale que:

$$\int_R \exp \left\{ -\frac{[f - \frac{1}{B}(\lambda'\psi^{-1}x^*)]^2}{2} \right\} df = 1 \quad \text{et}$$

$$\int_R f \exp \left\{ -\frac{[f - \frac{1}{B}(\lambda'\psi^{-1}x^*)]^2}{2} \right\} df = \frac{1}{B}\lambda'\psi^{-1}x^*$$

Cela implique alors que:

$$X_i = \hat{f}_B = E(f|x) = \frac{\int_{\Omega} \frac{1}{B}\lambda'\psi^{-1}x^* \exp \left\{ -\frac{x^{*'}Ax^*}{2} \right\} dx^*}{\int_{\Omega} \exp \left\{ -\frac{x^{*'}Ax^*}{2} \right\} dx^*} = \frac{1}{B}\lambda'\psi^{-1}x_W^*$$

avec:

$$x_W^* = \frac{\int_{\Omega} x^* \exp \left\{ -\frac{x^{*'}Ax^*}{2} \right\} dx^*}{\int_{\Omega} \exp \left\{ -\frac{x^{*'}Ax^*}{2} \right\} dx^*}$$

Sachant que  $\exp \{x^{*'}Ax^*/2\}$  est proportionnelle à la fonction de densité de la loi  $N(0, A^{-1})$ , Shi et Lee (1997) recommandent l'utilisation d'une méthode simple de Monte Carlo. Il s'agit de générer  $L$  vecteurs aléatoires  $u_1, \dots, u_L$  où chaque vecteur est généré suivant la loi uniforme sur  $\Omega$ . Si le but est de calculer une intégrale de la forme  $\int_{\Omega} Q(x^*)dx^*$ , alors l'on a:

$$V(\Omega) [Q(u_1) + \dots + Q(u_L)] / L \rightarrow \int_{\Omega} Q(x^*)dx^* \quad \text{si } L \rightarrow \infty$$

où  $V(\Omega)$  dénote le volume de  $\Omega$ . En appliquant ce résultat à l'expression de  $x_W^*$ , on a:

$$\frac{D(u_1) + \dots + D(u_L)}{d(u_1) + \dots + d(u_L)} \rightarrow x_W^*, \quad \text{si } L \rightarrow \infty$$

avec:

$$D(x^*) = x^* \exp \left\{ -\frac{x^{*'}Ax^*}{2} \right\} \quad \text{et} \quad d(x^*) = \exp \left\{ -\frac{x^{*'}Ax^*}{2} \right\}$$

### Annexe3: Les principaux tableaux

Table 1: Principales caractéristiques des enquêtes EDS

	Bénin	Burkina	CI	Mali	Niger	Togo
Années de sondage	1996	1998-99	1998-99	1995-96	1998	1998
Nombre de zones de dénombrement	200	210	140	300	268	288
Nombre de ménages :						
- Enquêtés	4499	4812	2122	8716	5928	7517
- Milieu urbain (%)	32	26	67	32	28	32
- Milieu rural (%)	68	74	33	68	72	68
Nombre de femmes :						
- Enquêtés	5491	6445	3040	9704	7577	8569
- Milieu urbain (%)	33	26	68	36	31	36
- Milieu rural (%)	67	74	32	64	69	64
Nombre d'hommes :						
- Enquêtés	1535	2641	886	2474	3542	3819
- Milieu urbain (%)	33	30	66	36	34	35
- Milieu rural (%)	67	70	34	64	66	65

Source : Enquêtes EDS

Table 2: Statistiques descriptives de l'indice de richesse ( $X$ )

Pays	Approche NBS				ACM			
	Moy.	Ecart-t.	Max	Min	Moy.	Ecart-t.	Max	Min
Bénin	0.009	0.573	1.930	-0.486	0.020	0.587	2.819	-0.456
Burkina	-0.150	0.472	2.045	-0,486	-0.133	0.496	2.819	-0.456
CI	0.663	0.754	2.044	-0.481	0.566	0.788	2.819	-0.449
Mali	0.066	0.498	1.989	-0.490	-0.010	0.496	2.647	-0.456
Niger	-0.179	0.482	2.009	-0.479	-0.159	0.485	2.819	-0.449
Togo	0.138	0.583	1.931	-0.491	0.104	0.580	2.819	-0.456
Ensemble	0.023	0.574	2.045	-0.491	0.000	0.572	2.819	-0.456

Table 3: Statistiques descriptives de l'indicateur nutritionnel ( $Z\_score$ )

Pays	Moy.	Ecart-t.	Max	Min
Bénin	-1.265	2.724	19.527	-28.471
Burkina	-1.749	2.512	17.108	-28.921
CI	-1.350	2.312	7.294	-27.808
Mali	-1.294	2.428	45.800	-23.978
Niger	-1.762	1.944	10.954	-13.117
Togo	-1.196	2.345	37.817	-29.016
Ensemble	-1.449	2.389	45.800	-29.016

Table 4: Analyse de sensibilité de l'indice de richesse  $X$

	Approche NBS				ACM			
	1 <sup>er</sup>	2 <sup>eme</sup>	3 <sup>eme</sup>	4 <sup>eme</sup>	1 <sup>er</sup>	2 <sup>eme</sup>	3 <sup>eme</sup>	4 <sup>eme</sup>
Pas d'élect.	100	100	100	57.3	100	100	99.7	57.0
Pas de radio	82.7	31.6	35.2	18.9	72.0	56.2	20.7	16.7
Pas de TV	100	100	100	59.0	100	100	99.8	58.5
Pas de frigo	100	100	100	84.4	100	100	100	84.2
Pas de bicyclette	54.0	39.7	51.5	67.4	46.8	57.1	42.7	68.3
Pas de moto	100	82.9	80.8	60.8	100	83.6	78.4	59.4
Pas de car	100	100	99.9	87.4	100	100	99.9	87.2
Plancher pauvre	100	68.8	72.6	28.5	100	80.5	60.0	25.2
Pas de latrine	100	95.0	36.0	14.8	100	78.4	45.5	18.2
Pas d'éducation	100	99.7	76.7	41.3	99.6	89.2	80.1	46.8
Pas d'accès à l'eau	14.1	15.5	11.5	5.2	14.8	18.2	9.4	4.3

Table 5: Corrélacion entre les indices de richesse des deux approches

Pays	Coefficients
Bénin	0.97
Burkina	0.98
CI	0.94
Mali	0.96
Niger	0.97
Togo	0.96
Ensemble	0.96

Table 6: Tests de dominance stochastique de premier ordre, pays  $F$  versus pays  $G$

	Intervalles		Nature de la dominance	P-value	
	$X$	$Z\_score$		$LR$	$t$
BN-CI	[-0.46, 1.23]	[-2.96, 2.18]	restreinte	0.000***	0.000***
BK-CI	[-0.48, 1.87]	[-5.97, 2.23]	complète	0.005***	0.003***
ML-CI	[-0.44, 1.52]	[-3.27, 2.30]	restreinte	0.000***	0.000***
NG-CI	[-0.45, 1.85]	[-3.46, 1.85]	”	0.000***	0.000***
TG-CI	[-0.44, 1.00]	[-2.87, 2.18]	”	0.000***	0.000***
BN-TG	[-0.46, 0.24]	[-2.92, 2.36]	”	0.090*	0.090*
BK-TG	[-0.47, 1.18]	[-5.64, 2.23]	”	0.013**	0.013**
ML-TG	—	—	—	non dominance	
NG-TG	[-0.44, 1.63]	[-5.03, 1.97]	restreinte	0.033**	0.033**
BN-ML	—	—	—	non dominance	
BK-ML	[-0.47, 1.08]	[-5.46, 2.44]	restreinte	0.000***	0.000***
NG-ML	[-0.45, 1.62]	[-3.47, 2.28]	”	0.000***	0.000***
BK-BN	[-0.47, 1.64]	[-5.85, 0.44]	”	0.000***	0.003***
NG-BN	[-0.44, 1.10]	[-3.38, 2.11]	”	0.070*	0.070*
BK-NG	—	—	—	non dominance	

Table 7: Tests de dominance stochastique de premier ordre, zone rurale versus zone urbaine

	Intervalles		Nature de la dominance	P-value	
	$X$	$Z\_score$		$LR$	$t$
Bénin	[-0.48, 1.58]	[-3.00, 2.37]	restreinte	0.028**	0.018**
Burkina	[-0.48, 1.68]	[-6.03, 2.43]	complète	0.033**	0.028**
CI	[-0.40, 1.92]	[-2.86, 1.84]	restreinte	0.013**	0.013**
Mali	[-0.46, 1.57]	[-5.02, 2.44]	complète	0.028**	0.033**
Niger	[-0.45, 1.62]	[-4.88, 1.63]	restreinte	0.023**	0.025**
Togo	[-0.47, 1.58]	[-5.08, 2.07]	complète	0.020**	0.008***
Ensemble	[-0.47, 1.73]	[-5.33, 2.27]	”	0.000***	0.000***

Table 8: Tests de dominance stochastique d'ordres supérieurs, pays  $F$  versus pays  $G$

	Intervalles		Nature de la dominance	P-value	
	$X$	$Z\_score$		$LR$	$t$
BN-ML (2)	[-0.47, 0.10]	[-3.23, 2.71]	restreinte	0.023**	0.020**
ML-TG	—	—	—	non dominance	
BK-NG (3)	[-0.45, 1.69]	[-5.44, -0.55]	restreinte	0.035**	0.040**